10. DINAMIKAI FELADATOK VÉGESELEM MEGOLDÁSA

10.1. Többszabadságfokú rezgőrendszerek

Szabadságfok: a vizsgált rendszer pillanatnyi helyzetét egyértelműen meghatározó skaláris koordináták száma.

Általános koordináta: azok a $q = q(t)$ skaláris koordináták, amelyek a rendszer helyzetét (vagy mozgását) egyértelműen meghatározzák.

q - lehet elmozdulás, vagy szögelfordulás,

$q = q(t)$ - az idő szerint legalább kétszer differenciálható függvény,

$$q(t) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\dot{q}(t)}_{\substack{\text{koordináta} \\ \text{sebesség}}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\ddot{q}(t)}_{\substack{\text{koordináta} \\ \text{gyorsulás}}} \quad .$$

Rezgőmozgás (lengő mozgás): ha mozgás közben $q, \dot{q}$, vagy $\ddot{q}$ többször is előjelet vált.

Diszkrét rezgőrendszer: rezgőmozgásra képes, véges szabadságfokú mechanikai rendszer.

Alkotórészei: - merev testek, vagy tömegpontok,
- rugalmas testek $\equiv$ rugók,
- csillapító elemek.

Kontinuum rezgések: folytonos tömegeloszlású, rugalmas testek (valóságos alkatrészek) rezgései.

Diszkrét rezgőrendszerek mozgásegyenlet rendszere:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k$$ a *Lagrange*-féle másodfajú mozgásegyenlet-rendszer.

$(k = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$ n - a rendszer szabadságfoka.

10.2. Energiaelvek mozgó kontinuumok esetén

Mozgó testek esetén minden mennyiség a hely mellett az időnek is függvénye.

Elmozdulásmező: $\vec{u}(\vec{r},t)$.

Sebességmező: $\vec{v}(\vec{r},t)$.

Gyorsulásmező: $\vec{a}(\vec{r},t)$.

A *D'Alembert*[1] (dalamber)- elv:

A dinamikai problémák formailag statikai problémára vezethetők vissza, ha a testre ható külső erőkhöz a tehetetlenségi erőt (inerciaerőt) is hozzávesszük.

Tömegpont esetén: $$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{0} = \vec{F}_i \underbrace{- m_i\vec{a}_i}_{\vec{T}_i} = \vec{F}_i + \vec{T}_i \, .$$

Az inerciaerő / tehetetlenségi erő: $\vec{T}_i = -m_i\vec{a}_i$.

Kontinuum (folytonos tömegeloszlású test) esetén: a térfogati erősűrűség mellett az inercia-erők sűrűségét is figyelembe vesszük.

$\vec{q} \quad \Rightarrow \quad (\vec{q} - \vec{a}\rho)$, ahol $\vec{a}$ az elemi tömeg gyorsulása és ρ a tömegsűrűség.

Folytonos tömegeloszlású testek esetén a tehetetlenségi erőrendszer térfogaton oszlik meg.

A dinamikai feladatoknál az egyensúlyi egyenlet helyett a mozgásegyenletet használjuk!

Egyensúlyi egyenlet: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ $\quad \Rightarrow \quad$ Mozgásegyenlet: $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \rho\vec{a}$.

A *D'Alembert* elv a dinamika alaptörvényével (az impulzus tétellel) egyenértékű.

---

[1] Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) francia matematikus és filozófus.

a) A virtuális teljesítmény elve:

Az elvet a mozgásegyenlet átalakításával vezetjük le. Szorozzuk meg az impulzus-tételt a sebességmező $\delta\vec{v}$ variációjával és integráljuk a test V térfogatára.

$$\int_{(V)} \delta\vec{v}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\nabla dV + \int_{(V)} \delta\vec{v}\cdot\vec{q}dV = \int_{(V)} \delta\vec{v}\cdot\vec{a}\rho dV$$

Átalakítva az első integrált, és alkalmazva a *Gauss-Osztrogradszkij*-tételt az

$$\int_{(A_p)} \delta\vec{v}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}dA - \int_{(V)} \frac{1}{2}\left(\delta\vec{v}\circ\nabla + \nabla\circ\delta\vec{v}\right)\cdot\cdot\underline{\underline{F}}dV + \int_{(V)} \delta\vec{v}\cdot\vec{q}dV = \int_{(V)} \delta\vec{v}\cdot\vec{a}\rho dV$$

alakot kapjuk.

A bal oldal középső integráljánál felhasználtuk, hogy az $\underline{\underline{F}}$ feszültségtenzor szimmetrikus, továbbá hogy a kinematikai peremen a sebességmező variációja nulla. Helyettesítsük be ebbe az egyenletbe a $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{D}}^{(4)}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}$ Hooke-törvényt, ahol $\underline{\underline{D}}^{(4)}$ az anyagállandók negyedrendű tenzora, és használjuk ki, hogy a dinamikai peremen a $\vec{p}_0 = \underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}$.

A virtuális teljesítmény elve:

$$\int_{(A_p)} \delta\vec{v}\cdot\vec{p}_0 dA - \int_{(V)} \frac{1}{2}\left(\delta\vec{v}\circ\nabla + \nabla\circ\delta\vec{v}\right)\cdot\cdot\underline{\underline{D}}^{(4)}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}dV + \int_{(V)} \delta\vec{v}\cdot\vec{q}dV = \int_{(V)} \delta\vec{v}\cdot\vec{a}\rho dV\ .$$

Az elv fizikai tartalma megegyezik a mozgásegyenlet tartalmával. Ezt az egyenletet a dinamikai feladat gyenge alakjának is szokás nevezni.

b) Kényszermozgások (a mérnöki gyakorlatban ez fordul elő)

Ha a rendszer helyzetét/mozgását egyértelműen meghatározó általános koordináták nem vehetnek fel tetszőleges értéket, akkor közöttük meghatározott kapcsolat áll fenn.

Kényszeregyenletek: a rendszer helyzetét leíró koordináták közötti függvénykapcsolatok.

$$f_p\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_n, t\right) = 0 \qquad \left(p = 1, 2, \ldots k\right).$$

Kényszeregyenletek osztályozása:

- Holonóm: a koordináta sebességek nem szerepelnek.
- Anholonóm: a koordináta sebességek szerepelnek.
- Reonóm: az idő szerepel.
- Szkleronóm: az idő nem szerepel.

A mérnöki feladatoknál leggyakrabban holonóm, szkleronóm kényszeregyenletek fordulnak elő.

10.3. A végeselem módszer alkalmazása – a mozgásegyenlet-rendszer és megoldása

a) A mozgásegyenlet rendszer felírása:

Közelítés:

- elmozdulásmező: $\underline{\underline{u}}^e\left(X,t\right) = \underline{\underline{A}}^e\left(X\right)\underline{\underline{q}}^e\left(t\right)$,
- sebességmező: $\underline{\underline{v}}^e\left(X,t\right) = \underline{\underline{A}}^e\left(X\right)\underline{\underline{\dot{q}}}^e\left(t\right)$,
- gyorsulásmező: $\underline{\underline{a}}^e\left(X,t\right) = \underline{\underline{A}}^e\left(X\right)\underline{\underline{\ddot{q}}}^e\left(t\right)$,
- sebességmező variációja: $\delta\underline{\underline{v}}^e\left(X\right) = \underline{\underline{A}}^e\left(X\right)\delta\underline{\underline{\dot{q}}}^e$.

A gyenge alakot egy végeselemre felírva helyettesítsük be ezeket a mennyiségeket és használjuk fel az 5.1. fejezet jelöléseit. Ekkor az

$$\left(\delta \underline{\underline{\dot{q}}}^e\right)^T \underbrace{\int_{\left(A_p^e\right)} \left[\underline{\underline{A}}^e(X)\right]^T \underline{\underline{p}}_0(X)\,dA}_{\underline{\underline{f}}_p^e \text{ – felületi terhelés}} - \left(\delta \underline{\underline{\dot{q}}}^e\right)^T \underbrace{\int_{(V)} \left[\underline{\underline{B}}^e(X)\right]^T \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}^e(X)\,dV}_{\underline{\underline{K}}^e \text{ – merevségi mátrix}} q^e(t) +$$

$$+\left(\delta \underline{\underline{\dot{q}}}^e\right)^T \underbrace{\int_{(V)} \left[\underline{\underline{A}}^e(X)\right]^T \underline{\underline{q}}(X)\,dV}_{\underline{\underline{f}}_q^e \text{ – térfogati terhelés}} = \left(\delta \underline{\underline{\dot{q}}}^e\right)^T \underbrace{\int_{(V)} \left[\underline{\underline{A}}^e(X)\right]^T \underline{\underline{A}}^e(X)\,\rho\,dV}_{\underline{\underline{M}}^e \text{ – tömegmátrix}} \ddot{q}^e(t)$$

egyenletet kapjuk.

Ezt írhatjuk tömörebben az $\left(\delta \underline{\underline{\dot{q}}}^e\right)^T \left(\underline{\underline{M}}^e \underline{\underline{\ddot{q}}}^e + \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e - \underline{\underline{f}}_p^e - \underline{\underline{f}}_q^e\right) = \underline{\underline{0}}$ alakban is.

Összegezve a szerkezet összes végeselemére és figyelembe véve a kinematikai peremfeltételeket az

$$\left(\delta \underline{\underline{\dot{q}}}\right)^T \left(\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} - \underline{\underline{f}}_p - \underline{\underline{f}}_q\right) = \underline{\underline{0}}.$$

egyenletre jutunk.
Mivel a sebességmező variációja nem nulla, a jobb oldali zárójeles kifejezésnek kell nullának lennie:

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}_p + \underline{\underline{f}}_q .$$

Ez egy közönséges másodrendű differenciálegyenlet rendszer $q_i(t)$-re nézve.

A test tömegmátrixa: $$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \sum_{e\in 1,1} \underline{\underline{M}}_{11}^e & \sum_{e\in 1,2} \underline{\underline{M}}_{12}^e & \cdots & \sum_{e\in 1,j} \underline{\underline{M}}_{1j}^e & \cdots & \sum_{e\in 1,N} \underline{\underline{M}}_{1N}^e \\ \sum_{e\in 2,1} \underline{\underline{M}}_{21}^e & \sum_{e\in 2,2} \underline{\underline{M}}_{22}^e & \cdots & \sum_{e\in 2,j} \underline{\underline{M}}_{2j}^e & \cdots & \sum_{e\in 2,N} \underline{\underline{M}}_{2N}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{e\in i,1} \underline{\underline{M}}_{i1}^e & \sum_{e\in i,2} \underline{\underline{M}}_{i2}^e & \cdots & \sum_{e\in i,j} \underline{\underline{M}}_{ij}^e & \cdots & \sum_{e\in i,N} \underline{\underline{M}}_{iN}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

ahol N - a test csomópontjainak száma,

$\underset{(3\times 3)}{\underline{\underline{M}}_{ij}^e}$ - az e jelű elem i, j csomópontjához tartozó tömegmátrix blokkja.

b) A mozgásegyenlet megoldása:

A megoldandó mozgásegyenlet: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}(t)$.

$\underline{\underline{q}}(t)$ - a végeselem rendszer szabadságfokával megegyező számú koordinátát (függvényt) tartalmaz.

Megoldási módszerek: 1. Direkt (közvetlen) integráció.
2. Sajátvektor (mód) szuperpozíciós eljárás.

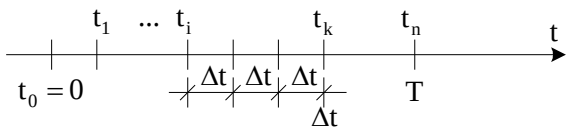
<u>1. Direkt integráció</u>: a mozgásegyenletet numerikus időléptetéses eljárással integráljuk.

Direkt: a numerikus integrálás előtt a mozgásegyenletet nem transzformáljuk át más alakra.
Alapgondolat: nem a $q(t)$ függvényt, hanem ennek a függvénynek csak adott (diszkrét) időpillanatokban vett $\underline{\underline{q}}(t_1), \underline{\underline{q}}(t_2), \ldots$ értékét határozzuk meg (idő diszkretizáció).

1.a. A centrális differencia módszer:

A megoldást a $< t_0 = 0, t_n = T >$ időintervallumban szeretnénk előállítani.

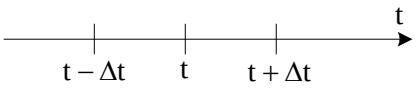
A t idő tengelyen Δt időintervallumokat veszünk fel:



Itt n - időlépések száma és $\Delta t = \dfrac{T}{n}$ az időlépés nagysága.

Feltételezés: a $\underline{\underline{q}}(t_0) = \underline{\underline{q}}^0$, $\underline{\underline{\dot{q}}}(t_0) = \underline{\underline{\dot{q}}}^0$ kezdeti feltételek ismertek.

A differenciálhányadosok helyett differenciahányadosokat vezetünk be (közelítés):



Az első deriváltat helyettesítő differenciák:

- a centrális differencia: $\underline{\underline{\dot{q}}}^t \approx \dfrac{1}{2\Delta t}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}\right)$,

- a jobboldali differencia: $\underline{\underline{\dot{q}}}_j^t \approx \dfrac{1}{\Delta t}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{q}}^{t}\right)$,

- a baloldali differencia: $\underline{\underline{\dot{q}}}_b^t \approx \dfrac{1}{\Delta t}\left(\underline{\underline{q}}^{t} - \underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}\right)$.

A második deriváltat helyettesítő differencia:

$$\underline{\underline{\ddot{q}}}^t \approx \frac{1}{\Delta t}\left[\underline{\underline{\dot{q}}}_j^t - \underline{\underline{\dot{q}}}_b^t\right] = \frac{1}{(\Delta t)^2}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t} - 2\underline{\underline{q}}^t + \underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}\right)$$

A második differenciát a mozgásegyenletbe helyettesítve egy rekurziós összefüggést kapunk:

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{f}}^t + \left(\underline{\underline{K}} - \frac{2}{(\Delta t)^2}\underline{\underline{M}}\right)\underline{\underline{q}}^t - \frac{1}{(\Delta t)^2}\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

Ebből $\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t}$ kiszámítható, ha ismerjük a $\underline{\underline{q}}^t$ és $\underline{\underline{q}}^{t-\Delta t}$ értékeket.

Probléma: az indulásnál csak a q^0 áll rendelkezésre, a $\underline{\underline{q}}^{-1}$ nem létezik.

Startfeltétel: alkalmazzuk a centrális differencia és a második deriváltat helyettesítő differencia képletét a $t = t_0 = 0$ -ra.

$$\left.\begin{aligned} t + \Delta t &= \Delta t \\ t = t_0 &= 0 \\ t - \Delta t &= -\Delta t \end{aligned}\right\}$$

$$\underline{\underline{q}}^{-1} = \underline{\underline{q}}^0 - \Delta t\,\underline{\underline{\dot{q}}}^0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\underline{\underline{\ddot{q}}}^0$$

ahol a $\underline{\underline{\ddot{q}}}^0$ az $\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}}^0 + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}}^0 = \underline{\underline{f}}_p + \underline{\underline{f}}_q$ egyenlet segítségével meghatározható.

A módszer feltételesen stabil.

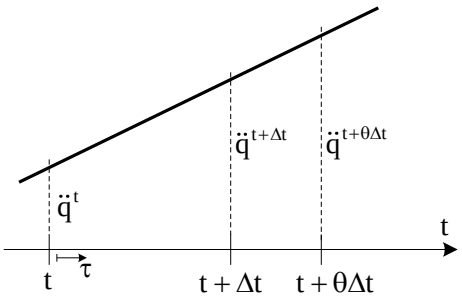
Feltétlenül stabil integráció: ha tetszőleges és T -hez képest nagy Δt megválasztásával végzett számításnál tetszőleges kezdeti feltételek esetén sem nő a megoldás minden korlát fölé.

Feltételesen stabil integráció: ha a fenti állítás csak $\Delta t \le \Delta t_{kr}$ esetén teljesül.

$\Delta t \le \Delta t_{kr} = \dfrac{T_n}{\pi}$, ahol T_n - az n szabadságfokú test legkisebb periódusideje.

1.b. Wilson-féle θ módszer

Feltételezés:
A $\underline{\underline{\ddot{q}}}$ az idő lineáris függvénye.



Egy tetszőleges $(t+\tau)$ időpillanatban – a lineáris változás: $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\tau} = \underline{\underline{\ddot{q}}}^{t} + \frac{\tau}{\theta\Delta t}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^{t}\right)$.

Ezt a τ változó szerint integrálva:

$$\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\tau} = \underline{\underline{\dot{q}}}^{t} + \underline{\underline{\ddot{q}}}^{t}\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^{t}\right),$$

$$\underline{\underline{q}}^{t+\tau} = \underline{\underline{q}}^{t} + \underline{\underline{\dot{q}}}^{t}\tau + \frac{1}{2}\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t}\tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{\ddot{q}}}^{t}\right).$$

Itt az időlépés nem Δt, hanem $\theta\Delta t$ lesz.

Az előző két összefüggésbe $\tau = (\theta\Delta t)$ -t helyettesítve:

$$\left.\begin{aligned}
\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t} &= \underline{\underline{\dot{q}}}^{t} + \frac{\theta\Delta t}{2}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{q}}^{t}\right) \\
\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} &= \underline{\underline{q}}^{t} + \underline{\underline{\dot{q}}}^{t}\theta\Delta t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}\left(\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} + 2\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t}\right)
\end{aligned}\right\}$$

Ebből a két egyenletből a $\ddot{q}^{t+\theta\Delta t}$ és $\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ kifejezhető a $\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t}$ segítségével:

$$\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{q}}^{t}\right) - \frac{6}{\theta\Delta t}\left(\underline{\underline{\dot{q}}}^{t} - 2\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t}\right),$$

$$\ddot{q}^{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t}\left(\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{q}}^{t}\right) - 2\underline{\underline{\dot{q}}}^{t} - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{q}^{t}.$$

Feltételezés: a tehervektor is lineárisan változik.

$$f^{t+\theta\Delta t} = \underline{\underline{f}}^{t} + \theta\left(\underline{\underline{f}}^{t+\theta\Delta t} - \underline{\underline{f}}^{t}\right).$$

Véve a mozgásegyenletet a $(t+\theta\Delta t)$ időpillanatban: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t} = \underline{\underline{f}}^{t+\theta\Delta t}$.

- A $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$-t a mozgásegyenletbe behelyettesítve, a $\underline{\underline{q}}^{t+\theta\Delta t}$-re (mint ismeretlenre) lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk.
- A megoldást visszahelyettesítve a $\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ és $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\theta\Delta t}$ megkapható, illetve az első három egyenletbe $\tau = \Delta t$-t helyettesítve a $\underline{\underline{q}}^{t+\Delta t}$, $\underline{\underline{\dot{q}}}^{t+\Delta t}$ és $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{t+\Delta t}$ értékek is adódnak.

Indítás: a $\underline{\underline{q}}^{0}, \underline{\underline{\dot{q}}}^{0}$ és $\underline{\underline{\ddot{q}}}^{0}$ értékeket kell ismerni. Nincs szükség start feltételre.
Az eljárás feltételesen stabil, ha: $\theta \geq 1{,}37$
A gyakorlatban a $\theta = 1{,}4$ használata szokásos.
Műveletigény időlépésenként az 1.a. és 1.b. eljárásnál: $\alpha m_k n$ (becslés)
n - a rendszer szabadságfoka,
m_k - a $\underline{\underline{K}}$ fél sávszélessége,
$\alpha \geq 2$.

2. Lengéskép/sajátvektor/mód szuperpozíciós eljárás

A műveletszámot úgy akarjuk csökkenteni, hogy a mozgásegyenlet együtthatómátrixait diagonálisra transzformáljuk.

Transzformációt vezetünk be: $\underline{\underline{q}}(t) = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{x}}(t)$, ahol

$\underline{\underline{P}}$ egy $(n \times n)$-es (egyelőre ismeretlen),ortogonális transzformációs mátrix. Ortogonális mátrix: $\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}^{-1}$.

$\underline{\underline{x}}(t)$ új elmozdulási változókat tartalmazó vektor.

Szorozzuk be a mozgásegyenletet balról a $\underline{\underline{P}}$ transzponáltjával:

$$\underbrace{\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{P}}}_{\tilde{\underline{\underline{M}}}}\,\underline{\underline{P}}^T \ddot{\underline{\underline{q}}}(t) + \underbrace{\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{P}}}_{\tilde{\underline{\underline{K}}}}\,\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{q}}(t) = \underbrace{\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{f}}(t)}_{\tilde{\underline{\underline{f}}}},$$

ahol kihasználtuk, hogy a $\underline{\underline{P}}$ transzformációs mátrixra igaz a $\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{P}}^{-1}$ összefüggés.

Rövidebben/tömörebben: $\tilde{\underline{\underline{M}}}\,\ddot{\underline{\underline{x}}}(t) + \tilde{\underline{\underline{K}}}\,\underline{\underline{x}}(t) = \tilde{\underline{\underline{f}}}(t)$.

Olyan $\underline{\underline{P}}$ transzformációs mátrixot keresünk, amely az $\underline{\underline{M}}$ és $\underline{\underline{K}}$ sávszélességét a legjobban csökkenti.

Eljárás a $\underline{\underline{P}}$ transzformációs mátrix előállítására:

A csillapítatlan, szabad rezgőrendszer mozgásegyenlete: $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}}$.

Megoldás: $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\varphi}} \sin \alpha t$, vagy $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{\varphi}} \cos \alpha t$.

Behelyettesítve a mozgásegyenlet-rendszerbe $\left(-\alpha^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right)\underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{0}}$.

A sajátérték feladatból annyi sajátfrekvenciát és sajátvektort kapunk, amennyi a rendszer szabadságfoka.

Megoldás: a saját körfrekvenciák és a sajátvektorok (lengésképek).

Jelölés: $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n$, α_i - az i jelű saját körfrekvencia,

$$\left(\alpha_1 \to \underline{\underline{\varphi}}_1\right),\ \left(\alpha_2 \to \underline{\underline{\varphi}}_2\right),\ \left(\alpha_3 \to \underline{\underline{\varphi}}_3\right)\ \ldots\ \left(\alpha_n \to \underline{\underline{\varphi}}_n\right),$$

$\underline{\underline{\varphi}}_i$ - az i jelű saját körfrekvenciához tartozó sajátvektor.

A sajátvektorok a tömegmátrixra nézve ortogonálisak és normáltak (ortonormáltak):

$$\underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\varphi}}_j \quad \begin{cases} = 1, & \text{ha } i = j, \\ = 0, & \text{ha } i \ne j. \end{cases}$$

Új mátrixok bevezetése:

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varphi}}_1 & \underline{\underline{\varphi}}_2 & \cdots & \underline{\underline{\varphi}}_n \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{\Omega}}^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & & & & \\ & \alpha_2^2 & & & \\ & & \alpha_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_n^2 \end{bmatrix}$$

- az $\underline{\underline{\Omega}}^2$ diagonál mátrix.

Ezzel a sajátérték feladat:

$$\underline{\underline{\phi}}^T / \qquad -\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\phi}}\,\underline{\underline{\Omega}}^2 + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{0}},$$

$$-\underbrace{\underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\phi}}}_{\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{\Omega}}^2 + \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{0}},$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\phi}}.$$

Legyen $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{\phi}} \Rightarrow \underline{\underline{q}}(t) = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{x}}(t)$.

Ezt a mozgásegyenletbe behelyettesítve: $\underline{\underline{\ddot{x}}}(t) + \underline{\underline{\Omega}}^2 \underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{f}}(t) = \underline{\underline{r}}(t)$

Kezdeti feltételek: $\underline{\underline{x}}^0 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{q}}^0$, $\underline{\underline{\dot{x}}}^0 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\dot{q}}}^0$.

Az $\underline{\underline{\ddot{x}}}(t)$ együtthatója egységmátrix, az $\underline{\underline{x}}(t)$ együtthatója diagonál mátrix.

$$\Downarrow$$

A mozgásegyenlet rendszer n db egymástól független differenciál egyenletre esik szét.
Ezeket a differenciál egyenleteket külön-külön oldjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_i(t) + \alpha_i^2 x(t) = r_i(t) \\ &r_i(t) = \underline{\underline{\varphi}}_i^T f(t) \end{aligned}\right\} i = 1,2,3,\ldots n$$

Kezdeti feltételek: $x_i\big|_{t=0} = \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{q}}^0$, $\dot{x}_i\big|_{t=0} = \underline{\underline{\varphi}}_i^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\dot{q}}}^0$

Az általános megoldás: $x_i(t) = \underbrace{a_i \sin\alpha_i t + b_i \cos\alpha_i t}_{\text{homogén megoldás}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_i}\int_{\tau=0}^{t} r_i(\tau)\sin\alpha_i(t-\tau)\,d\tau}_{\text{partikuláris megoldás}}$.

A tényleges megoldás (az eredeti feladat megoldása): $\underline{\underline{q}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{\varphi}}_i x_i(t)$

$\underline{\underline{\varphi}}_i$ - sajátvektorok / lengésképek / móduszok.

A módszuperpozíciós megoldás gondolatmenete:

- A sajátérték probléma megoldása: sajátértékek, sajátvektorok.
- A szétesett mozgásegyenletrendszer megoldása.
- A megoldások szuperpozíciója.

10.4. A végeselem módszer alkalmazása rezgéstani feladatok megoldására

Gerjesztés: a rendszer terhelése időben periodikusan változik.
Periodikus terhelés $\equiv$ gerjesztés.

a) Harmonikus gerjesztés:

Mozgásegyenlet: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{f}}_0 \cos\omega t$, ahol $\underline{\underline{f}}_0$ - a gerjesztő erők amplitúdói,

ω - a gerjesztés körfrekvenciája.

A megoldás keresése: $\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{q}}_0 \cos\omega t$, ahol $\underline{\underline{q}}_0$ - rezgési amplitúdók a csomópontokban.

A megoldást a mozgásegyenlet-rendszerbe behelyettesítve:

$$\underbrace{\left(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right)}_{\underline{\underline{Z}}(\omega^2)\text{ - dinamikai merevségi mátrix}} \underline{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{f}}_0 .$$

$\underline{\underline{Z}}(\omega^2)\underline{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{f}}_0$ - lineáris algebrai egyenletrendszer a csomóponti elmozdulások amplitúdóira.

Megoldás: $\underline{\underline{q}}_0 = \left[\underline{\underline{Z}}(\omega^2)\right]^{-1} \underline{\underline{f}}_0$.

A megoldhatóság feltétele: $\omega^2 \neq \alpha_i^2$, $(i = 1,2,3,\ldots n)$.

b) Szabad rezgések, sajátérték feladat:

Szabad rezgés: $\underline{\underline{f}}(t) = \underline{\underline{0}}$.

A szabad rezgés mozgásegyenlet rendszere: $\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\ddot{q}}}+\underline{\underline{K}}\underline{\underline{q}}=\underline{\underline{0}}$.

Ez az n szabadságfokú csillapítatlan, szabad rezgőrendszer mozgás egyenlet rendszere.

Megoldás: $\underline{\underline{q}}=\underline{\underline{\varphi}}\sin\alpha t$, ahol - $\underline{\underline{\varphi}}$ - a sajátvektor,

- α - a saját körfrekvencia.

A megoldást behelyettesítve a mozgásegyenlet-rendszerbe: $\left(-\alpha^2\underline{\underline{M}}+\underline{\underline{K}}\right)\underline{\underline{\varphi}}=\underline{\underline{0}}$.

Homogén, lineáris algebrai egyenletrendszer a $\underline{\underline{\varphi}}$ koordinátáira.

A nemtriviális megoldás létezésének feltétele: $\det\left|\underline{\underline{K}}-\alpha^2\underline{\underline{M}}\right|=p\left(\alpha^2\right)=0$.

$p\left(\alpha^2\right)$ a karakterisztikus polinom (az α^2 -re nézve n-ed fokú polinom).

A karakterisztikus polinom gyökei a rendszer saját körfrekvenciái:

$$0\le\alpha_1^2\le\alpha_2^2\le\ \dots\ \le\alpha_m^2.$$

α_i^2 pozitív valós szám, ha $\underline{\underline{K}}$ és $\underline{\underline{M}}$ pozitív definit mátrix.

Minden sajátfrekvenciához tartozik egy sajátvektor: $\left(\underline{\underline{K}}-\alpha_i^2\underline{\underline{M}}\right)\varphi_i=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\varphi}}_i=\dots$, ahol $\left(i=1,2,\dots n\right)$.

c) Ortogonalitási tétel:

Legyen $\alpha_i\ne\alpha_j$.

Minden sajátfrekvenciához tartozik sajátvektor: $\alpha_i\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\varphi}}_i$, és $\alpha_j\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\varphi}}_j$.

Megjegyzés: $\underline{\underline{\varphi}}_i,\underline{\underline{\varphi}}_j$ konstansszorosa is sajátvektor.

$$\underline{\underline{\varphi}}_j^T\ /\quad \underline{\underline{K}}\underline{\underline{\varphi}}_i=\alpha_i^2\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\varphi}}_i\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\varphi}}_j^T\underline{\underline{K}}\underline{\underline{\varphi}}_i=\alpha_i^2\underline{\underline{\varphi}}_j^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\varphi}}_i.$$

$$\underline{\underline{\varphi}}_i^T\ /\quad \underline{\underline{K}}\underline{\underline{\varphi}}_j=\alpha_j^2\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\varphi}}_j\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\varphi}}_i^T\underline{\underline{K}}\underline{\underline{\varphi}}_j=\alpha_j^2\underline{\underline{\varphi}}_i^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\varphi}}_j.$$

Mivel $\underline{\underline{K}},\underline{\underline{M}}$ szimmetrikus $\Rightarrow\ \underline{\underline{K}}=\underline{\underline{K}}^T,\ \ \underline{\underline{M}}=\underline{\underline{M}}^T$.

$$0=\left(\alpha_i^2-\alpha_j^2\right)\underline{\underline{\varphi}}_i^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\varphi}}_j.$$

Ha $\alpha_i\ne\alpha_j\ \left(i\ne j\right)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\varphi}}_i^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\varphi}}_j=0$.

A sajátvektorok a tömegmátrixra nézve ortogonálisak.

Ha $\alpha_i=\alpha_j\ \left(i=j\right)$, akkor legyen $\underline{\underline{\varphi}}_i^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\varphi}}_i=1$.

A sajátvektorok a tömegmátrixra nézve normáltak.

A „normált” tulajdonság analógiája a 3D vektortérben:

A vektor legyen egységvektor. A második feltétel a $\underline{\underline{\varphi}}_i$ sajátvektort egyértelművé teszi.

Legyen $i=j$.

$$\underline{\underline{\varphi}}_i^T\underline{\underline{K}}\underline{\underline{\varphi}}_i=\alpha_i^2\underbrace{\underline{\underline{\varphi}}_i^T\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\varphi}}_i}_{=1}\ \Rightarrow\ \alpha_i^2=\underline{\underline{\varphi}}_i^T\underline{\underline{K}}\underline{\underline{\varphi}}_i.$$

A φ_i sajátvektor ismeretében az α_i sajátfrekvencia meghatározható.

Az eredmény általánosítása:

Legyen: $\phi=\left[\underline{\underline{\varphi}}_1\ \ \underline{\underline{\varphi}}_2\ \ \dots\ \ \underline{\underline{\varphi}}_n\right]$, $\qquad \underline{\underline{\Omega}}^2=\begin{bmatrix}\alpha_1^2 & & & \\ & \alpha_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n^2\end{bmatrix}$.

n - a rendszer szabadságfoka

$$\underline{\underline{\phi}}^T \; / \quad -\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\phi}}\,\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{0}}\,,$$

$$-\underbrace{\underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{\phi}}}_{\underline{\underline{E}}}\,\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{0}}, \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\Omega}}^2 = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{\phi}}\,.$$

Ha a rendszer összes, n sajátvektora ismert, akkor az összes sajátfrekvencia meghatározható.